「関数の考え」の低学年における単元横断的指導の体系化とその効果

札幌市立日新小学校　瀧ヶ平悠史

Ⅰ．問題と目的

1. 学習指導要領における「数量関係」領域の位置付け

平成 20 年度版学習指導要領における数量関係の領域のねらいは以下のように記述されている。

> 「A 数と計算」「B 量と測定」及び「C 図形」の各領域の内容を理解したり，活用したりする際に用いられる数学的な考え方を身に付けること，また，数量や図形について調べたり，表現したりする方法を身に付けることである。（下線筆者）

また，次のようにも今回の改訂にあたって述べている。

> 今回の改訂では，言葉，数，式，図，表グラフなどを用いた思考力，判断力，表現力を重視するため，低学年から「D 数量関係」の領域を設け，各学年においての充実を図っている。＜中略＞
> 特に低学年で「D 数量関係」の領域を設けるに当たっては，従前の「A 数と計算」の領域に位置づけられていた内容のうち，「式の表現と読み」及び「資料の整理と読み」に関する内容を「D 数量関係」の領域に移すことによって，その整理と充実を行なった。

次に，低学年における「数量関係」の内容の構成を，学習指導要領より低学年「数量関係」を抜粋し以下に示す。⑴表1⑴

⑴表1⑴ 小学校学習指導要領解説　算数編　第1章総説
3算数科改訂の要点　小学校算数科の内容の構成

	D　数量関係
第1学年	式による表現 ・加法や減法の場面を式に表す（「A 数と計算」から移行） 絵や図を用いた数量の表現
第2学年	式による表現 ・加法と減法の相互関係（「A 数と計算」から移行） ・乗法の場面を式に表す（「A 数と計算」から移行） 簡単な表やグラフ（「A 数と計算」から移行）

以上が示すように，今回の学習指導要領の改訂において，低学年において「数量関係」の領域が新設されているが，その内容のほとんどが「数と計算」領域からの移行であることがわかる。言い換えれば，これまでの位置づけでは，そのねらいが十分に達成されてこなかったとも言える。

留意しておく点は，第１学年，第２学年のいずれも「関数」は内容としては位置づいていないという点である。

2. 平成 22 年度全国学力･学習状況調査の結果から

次に，平成 22 年度全国学力・学習状況調査の A 問題の結果から,「数量関係」の領域における課題を示していく。

平成22年度全国学力･学習状況調査 A 問題　設問 2

> ⑴ 8mの重さが　4㎏の棒があります。この棒の 1mの重さは何㎏ですか。求める式と答えを書きましょう。
> ⑵ 2ℓのジュースを 3 等分すると，1 つ分の量は何ℓですか。答えを分数で書きましょう。

設問 2 の（1）（2）における正答率はそれぞれ 54.1%，40.6%である。誤答を解答類型から分析してみると，（1）では 8÷４，8×4 もしくは 4×8 と解答しているものが合わせて 36.3%。（2）では 3/2, 1/3 と解答しているものが合わせて 34.4%である。いずれも 3 割を越えている。

また，（1）で 8÷4，8×4 もしくは 4×8 と解答したものと（２）で誤答，もしくは無解答だったものとの相関は 65%以上である。

この結果から，２つの数量の依存関係を見抜けず，数量の関係を整理することなく立式したり，数の大小のみに注目してわり算を適用したりしているという実態が見えてくる。

平成22年度全国学力･学習状況調査 A 問題　設問 9

> ⑴ 下の図は，とし子さんたちの学校の畑を表しています。
> ＜図　省略＞
> じゃがいも畑の面積 40 ㎡は，学校の畑の面積 50 ㎡のどれだけの割合にあたりますか。答えを書きましょう。

設問 9（1）においても同様の傾向が見られた。正答率は 57.8%とこちらも低く，数量の依存関係を整理せずに解答して誤答であったものを合わせ

ると 20%以上である。過去の学力テストにおいても同様の傾向が見られた。

以上の結果からも，高学年までに数量の依存関係を見つけ，それを活用しようとする「関数の考え」が十分に身に付いていないことが見て取れる。

3.「関数の考え」を支えるもの

小学校段階において十分に「関数の考え」が育まれない要因について,これまでの指導についての問題点をここで整理していく。

以下に 1973 年に当時の文部省から出された「関数の考えの指導」から,「関数の考え」についてまとめられたものを示す。（表 2）

⑵表 2⑵　文部省　関数の考えの指導　より

a	依存関係に着目すること ①　変量に着目する ②　ある変量 Y と関係付ける X にどんなものがあるのか考える ③　変量 Y は，それら変量 X などのうち，どれによって一意に決まってくるのかを考える
b	関数関係を見つけたり，用いたりすること ①　依存関係から対応･変化の規則性を明らかにする。 ②　これを利用して問題を解決する
c	関数関係を表現する

留意すべき点は,表 2 からもわかるように,「関数の考え」とは「関数」そのものを教えることとは異なるという点である。

しかし，実際には中島（1981）が指摘するように，小学校段階では「関数の考え」の素地となる上記の a の指導が十分になされず，「関数」そのものを教える指導が多い。

実際に，どの教科書や指導計画においても，内容単元として初めて「関数」を扱うのは,第 4 学年の「変わり方」である。しかし,このとき初めに依存関係の 2 量が提示され，すぐに 2 量の変化や対応のきまりを見つけてくような指導が中心となる。これらの指導では,いつも対象とする 2 量の間に依存関係があり,あるきまりが成立していることが前提となっている。つまり,a の指導が十分になされないままに,b.①を対象とした指導が中心に行われているのである。

これについては，杉山（2008）も同様に次のように述べている。

> 知っているものについてだけ,それが関数に見られますよと言うだけでは意味がありません。
>
> 関数の考えに目を向けるということは，関数を教える，関数を知るのではなくて，関数の考えを生かして，うまく問題を解決するということです。

以上の指摘からもわかるように，「関数の考え」を生かすということは，そもそも問題の解決にあたって,「関数」を利用しようとする態度の育成が必要となる。つまり,「関数」そのものを知っていても，そういったものを問題の解決に利用しようとする態度と，思考様式が身についていなければ何の役にも立たないのである。このように考えると，その最も重要な態度の育成にあたる a の指導が，小学校における「関数の考え」の指導で欠落していることとなる。

以下に,ここまでの問題点を整理したものを示す。

①「関数の考え」の指導が,「関数」そのものを教える指導と混同されている。
②「関数の考え」の素地とも言える a の力を育む指導そのものが明確にされていない。
③②の指導をどの発達段階で行うかの位置付けが明らかにされていない。

以上のことから,今後も a の指導が小学校段階の指導として明確に位置づかなければ,前述の 2.で示したように,高学年において「関数」を活用して問題を解決していく力を育んでいくことは難しいと考える。

そこで，本研究では a の指導を具体的に明らかにして,これを重点的に位置づけていくこととした。これにより，「関数」に着目して思考することのよさを児童が実感し，それを活用して問題を解決する力が大きく育まれると考えたのである。

また，この a の指導は以下の 3 点の理由から，第 3 学年までを一つの段階として，低学年に位置付けていくこととした。

- 第4学年において初めて「関数」が内容単元として位置づき,b.①,c 段階を中心とした指導がされること。
- 高学年において割合や比,比例や反比例など,「関数」を活用した問題の解決や,それを表現して分析する b.②,c の学習内容が単元として位置づいていること。
- 学習指導要領の今改訂によって低学年における「数量関係」としての領域が位置づいたこと。

本研究ではその最初の段階である第１学年児童（28 名）を対象に，各領域において「関数の考え」が顕著に表れてくる場を単元横断的に位置づけ，その指導の効果を授業における児童の様相から明らかにしていく。

III. 指導の実際と効果の考察

1. なんばんめ (a①・②,b①)

①全体の人数を定数。前から何人を変量とし，（順に板書していくことで）１人ずつ増えていることに着目させる。
②前から何人と依存関係にある残りの人数に着目させる。（片方ずつではなく，2 量がともに変化しているという見方を価値づける）
※　前から何番目と後ろから何番目の 2 変数の依存関係についても同じように扱った。

2. いくつといくつ (a①・②,b①)

①5～10 を合成する 2 数を変数とする。合成できる 2 数をランダムに取り上げ，画用紙に書いて黒板に貼る。（分解についても同様）

「なんばんめ」の指導の際は，教師による意図的な板書（1 ずつ増えるように縦に並べる）により一方の変数に着目させ，それに対してもう一方はどう変化しているのかを問うことで，数の依存関係に気づかせている。しかし，次の単元である「いくつといくつ」では，児童自らが 5～10 を合成する 2 変数の一方に着目し，ランダムに掲示された画用紙を 1 ずつ増えるように並び替えていった。その後，初めに着目していた方の変数と，もう一方の変数の依存関係（一方が1増えれば，もう一方は1減る）に関しても，教師の発問なしに発見していくことができた。

また，この段階で式と半具体物であるマグネットとを結び付けて，なぜ依存関係が成立するのかを演繹的に説明する姿の表出が見られるようになった。（図１）

「左のマグネットを1ことったら，それを右のに入れるんだから，とった数だけ右に入る数が増える。」

(図 1)

以上の様相から，簡単な場合において，自ら 2 変量に着目し，その依存関係を見つけることができるようになっていることがわかる。また，表出してきた演繹的な説明からも，一部児童において，定数への意識があることが見て取れる。

3. 繰り上がりのないたしざん (a①・②,b①)

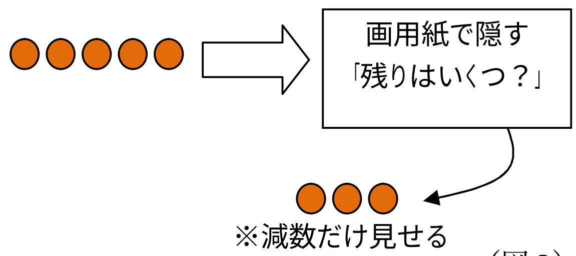
①　和が一定の計算問題を出題。（ただし，出題順はランダム）
②　被加数や加数のどちらかを定数とした計算問題を出題。（ただし，出題順はランダム）

いずれにおいても，児童はランダムに板書された問題から 2 変数の依存関係を見つけることができた。また，多くの児童からブロックなどを使い，その理由を説明しながら，変化の順に並べる様子も見られた。

より 2 変量の依存関係へ着目する力が強化され，定数への意識も高まっていることが見て取れる。

4.繰り下がりのないひきざん (a①・②・③,b①)

①　差が一定の問題を，マグネットを使って提示。
②　被減数を提示。その後一度，被減数を画用紙で隠してマグネットを取り，減数だけが見えるようにする。差はいくつかを問う。



（図 2）

提示したのは 5―3，6―4，8―6 の順。5―3 の提示段階で，被減数に着目し，減数 3 と被減数 5 が差を求めるのに関係があることを 28 名全員が認めた。（図 2）

また，次の 6―4 の提示では，「減数が 1 増えているのだから，さっきよりも差が小さくなっているのでは？」という発問に対し，「被減数も増えている」「減数が1増えても，被減数も1増えているから差は同じ」という見方が多くの子から認められた。

8―6 の提示においては，同じように被減数が 1 増えるのを見せ，それを画用紙で隠してから「差が同じ 2 にする場合，減数をいくつにすればよいか」を問うた。その結果，被減数と減数の依存関係を使い，減数を 1 増やせばよいという説明を 2 名を

のぞいた児童（93%.26 名）全てが，図や言葉のいずれかを使って表すことができたことを確認した。

その後，児童は依存関係に着目し，7－5，9－7，10－8，4－2，3－1 も見つけていくことができた。

学級で共有された言葉は「いっしょに変わる」である。この言葉からも，被減数と減数がそれぞれで変化しているのではなく，差を定量としたとき，2 変量が互いに依存するということが明確に意識されたと言える。その後,ほとんどの児童は「変わる」と「いっしょに変わる（一方が増えればもう一方も増える,一方が減ればもう一方も減る,一方が増えればもう一方が減る）」を授業中に使い分けている。さらに，教師の意図的な提示ではない場合においても，変量を見つけたり，依存関係にある 2 量に着目したりする姿が多く認められた。

Ⅳ. 関数の活用

1.10 よりおおきいかず（a①・②・③,b①・②）

中島（1981）は，「関数の考え」について，次のように述べている。

> 一つの数量を調べようとするときに，それと関係の深い数量を捉え，それらの数量との間に成り立つ関係を明らかにし，その関係を利用しようとする考えが，関数の考えの基本である。

これまで育んできた「関数の考え」a（表 2）の力をもとに,低学年における「関数」の活用という観点から，2 学期の初めに次のような授業を構成した。

⑴ ねらい

ある数量を調べるために,「関数」を活用して考えることができる。

⑵ 授業の流れ

1 学期の最後に，20 までの数を扱い，2，5，10 ずつ数えることのよさを確認してきている。

壁で隠して缶にマグネットを入れ，その数を当てるというゲームであることを初めに確認する。すると，児童から次のような発言が出てきた。

・音がヒントになるね
・音がヒントにならないときもあるよ

すでに，個数を知るためにそれと依存関係にある音の数に注目している子がいることがわかる。ただし，この意味を問い返して説明させたが，この段階で依存関係に着目している子は 28 人中わずか 8 名（29%）であった。

早速, 4 回音を鳴らして（2 個ずつ）8 個入れた。すると，大半の児童が音数と個数との依存関係に気づき，4 個であると予想した。その理由を確認し，缶の中身を見せた。驚きの表情を浮かべる子と，何か発見したことを必死にまわりに訴え始める子に別れた。児童からは以下のような発言と質問があった。

・1個ずつじゃないんだ！
・同じ数ずつ入れているの？

同じ数ずつ入れていることだけを確認し, 次に, 6 回音を鳴らして（2 こずつ）12 個入れた。すると，約半数近くの子が 12 個であることを予想した。児童の説明は以下の通りである。

- 2 個ずつだから，2，4，6…でちょうど 12 個
- 2，4，6…（表のように横に並べて書きながら）で，2 個ずつ入れていっているから，6 回目は 12 個
- ちょうど 5 回目で 10 個（上の表を使いながら）だから，それより1回音が多く鳴っているということは 2 個多くて 12 個
- 音が鳴った数を 2 回足すと個数になるというきまりがあるから，6+6 で 12 個

その後，缶の中が 12 個であることを確認し，音が 8 回の場合（16 個）でも，自分たちの考えが適用できることを確認していった。

⑶ 評価

ゲームの 3 回目では，全ての児童（28 名）が，マグネットの個数と依存関係にある音の数に着目し，関数を活用してその個数を明らかにすることができた。

児童から表出してきた発言を見ると，変化の規則性（音の数が 1 ずつ増えれば，個数は 2 ずつ増える），対応の規則性（音の数を 2 回足すと全体の個数になる $y = 2x$）いずれも確認できる。児童は，缶に入っている見えないマグネットの個数を調べるために，依存関係にある音の数を捉え，その間に成り立つ関係を利用して問題を解決していくことができたのである。これまでの指導の効果が見られ，1 学年段階として十分に「関数」を活

用できた1時間となったと考えている。

2.ずをつかってかんがえよう (a①・②・③,b①・②)

菊池（1976）は，思考の様式には静的なもの（分析・統合的）と動的なもの（実験・試行錯誤）があると述べている。そして，「関数の考え」は後者，つまり動的なものであると位置づけ，それを支える態度 a(表 2)を育むことの重要性を述べている。

その上で，小学校の「関数の考え」の指導における問題点を次のように指摘している。

> 問題として与えられた数量を数直線や線分図などといったものに表し，分析をしていくことが中心の指導となっており，<u>自ら変数化して試行錯誤する力が不足している。</u>

つまり，小学校の指導において「考える対象とすべき数量が一方的に与えられ，それを分析する思考」ばかりが中心に扱われていることを問題視しているのである。菊池（1976）は，様々な数量の中から，問題の解決に必要な数量に着目すること，それらの数量のどこに依存関係があるのかを試行錯誤しながら探っていく過程にこそが，「関数の考え」の核となる力と述べている。

以上の指摘を踏まえ，本単元では，あえて数量を一方的に与えず，児童自らが必要な数量に着目し，その関係を見出していく過程を大切に位置づけた教材化をした。

以下に示すのは，本単元の最後に位置づけた鶴亀算の学習である。

(1) ねらい

問題の解決に必要な2条件のうち，1条件をもとに問題構造を整理し，もう1つの条件を自ら見出すことができる。

(2) 授業の流れ

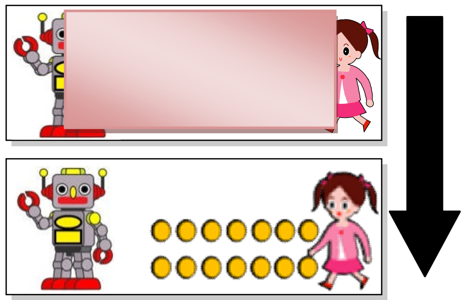
じゃんけんゲームを2人1組のペアで行う。(一方が人間役，もう一方がロボット役）ルールは次の通りである。

・ じゃんけんで人間が勝ったら，ロボットからおだんごを4個もらえる。
・ じゃんけんで人間が負けたら，ロボットからおだんごを2個もらえる。

役を交代して 2 回ずつゲームを行う。その後，テレビに提示した女の子とロボットの同様のゲームの様子を見て，女の子が何回勝ったのかを考えることを伝える。ビデオには次のようなしかけがしてある。(図 3)

・ じゃんけんを始めると壁が現れ，じゃんけんの様子が見えなくなる。
・ じゃんけんをする声は聞こえてくる。
・ じゃんけんが終わると壁が無くなり，女の子がもらったおだんごが現れる。

(図 3)



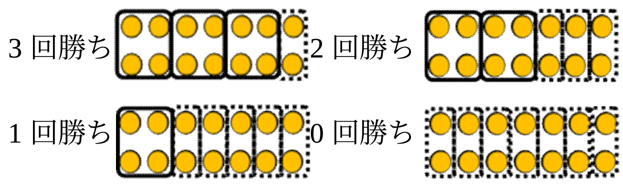
現れたおだんごの数は 14 個である。(児童はまだじゃんけんの総回数には着目していない)

このとき，<u>児童は一斉におだんごの数を数え，それをノートに描き写して勝ち数を探り始めた。</u>また，以下のような発言も認められた。

・ じゃんけんが見えなくても勝った回数がわかるかも。
・ おだんごの数でわかるよ。

誤答も含め，出てきた考えは 0 回，1 回，2 回，3 回，4 回，12 回の 6 通りである。

児童の説明により 4 回，12 回勝ちはあり得ないことが証明された。また，3 回勝ち，さらに，0～2 回勝ちもあり得ることが明らかにされた。(図 4)



(図 4)

その後，児童からは以下のような発言が認められた。

・ 0 回勝ちはあり得ない。そんなにじゃんけんをしていない。
・ 4 回くらいしかじゃんけんをしていないよ。
・ 何回じゃんけんしたかわからないと，はっきりわからない。

・　初めのビデオをもう一度見てみればわかるはず。

これらの発言から，初めの問題提示で使用したビデオを再視聴することでじゃんけんが 5 回であることが確認され，勝ち数が 2 回であることが明らかとなった。（図 5）

(図 5)

勝	0	1	2	3	4（×）→
負	7	5	3	1	

(3) 評価

どの児童も初めのビデオ提示の段階で，おだんごの数は勝った回数に依存していることに気づくことができた。また，その後，全ての児童がおだんごの数をもとに勝った回数を試行錯誤しながら追究している。自ら解決のために必要な変量に着目し，動的に追究する姿が認められたと言える。

また，4 回と 12 回があり得ないこと，0～3 回勝ちがあり得ることの説明では，勝った時の回数が 1 増えるごとに，おだんごの数は 4 増えるということ。また，負けが 1 増えるごとに，おだんごは 2 増えるという考えが多用されている。そして，おだんごの数が 14 個という定量であることが強く意識され，4 回，12 回勝ちになる勝ち負け回数の組み合わせはあり得ないということの意味が全体で共有された。これらのことから，児童は以下の数量の依存関係に着目し解決をしたと言える。

①勝った回数と，そのときにもらえるおだんごの個数
②負けた回数と，そのときにもらえるおだんごの個数
③おだんごの総数 14 個を定量としたとき，勝ちでもらったおだんごの数と負けでもらったおだんごの数

③においては，児童はきまりがあることを前提として考えていない。つまり，試行錯誤する中で，これはあり得る，あり得ないという結果を帰納的に見つけていったと言える。

その後，おだんごの総数である 14 個が固定されている場合，負ける回数が多くなればなるほど，じゃんけんの総回数が増えていくことにも気づいている。また，それをもとに，そのじゃんけんの総回数が勝ち数を一つに絞り込む決め手となることを明らかにしている。つまり，勝ち数を決める 2 条件のうち，「おだんごの数」という条件から問題構造を整理し，もう一つの条件である「じゃんけんの回数」を，児童自らが見出したのである。

以上のように，児童は，この 1 時間を通して手がかりとなる数量を変数化し，何度も試行錯誤を繰り返す中で解決を図っている。

これらの様相から，1 学年の児童においても，菊池（1976）の言う「関数の考え」の核となる動的な思考の表出が十分に認められたと言える。

Ⅴ．研究全体の成果，まとめ

「関数の考え」を系統的に位置付けた単元のうち，2 単元目の「いくつといくつ」で，「関数の考え」a.①（表 2）の表出がほぼ全児童から見られた。

5 単元目「10 よりおおきいかず」では，a.③（表 2）までの表出が見られた児童が 68%（19 名）。このうち全ての児童から b.①②段階（表 2）である問題解決への活用も確認した。

9 単元目「たしざん」において，導入 1 時間目の 9＋3 での「関数の考え」の活用の割合は以下である。

① 数え足し（11%.3 名）
② 和が一定の関数「（9＋1）＋（3－1）」の活用（25%.7 名）
③ 加数分解（43%.12 名）
・②の考えがよく理解できる（83%.10 名）
・②の考えが難しいが理解できる（17%.2 名）
④ ②，③の両方を記述（21%.6 名）

以上の結果から，和が一定の関数を活用することができた児童②，④は 46%（13 名）。③の児童も，そのほとんどがこの考え方をよく理解している。

また，10 単元目の「ひきざん」では，導入 1 時間目の 13－9 の問題において，③の児童のうち 67% が，（13＋1）－（9＋1）の差が一定の関数を活用して解決できたことを確認した。

最終 13 単元目での a.③（表 2）までの表出が顕著に認められた児童は 86%（24 名）。このうち，b.②（表 2）である「関数の考え」の問題解決への活用を積極的に行っていこうとする児童は全体の 78%（21 名）であった。

これらの結果から，対象の 1 学年児童の「関数の考え」の a（表 2）の育ちに，一定の効果が見られ，それに裏付けされた b の力の表出も顕著に認められたと言える。

留意すべき点は,3 単元目以降において,基本的に規則性が成立していることを前提とした発問（「何かきまりはないかな？」「きまりを使って解けないかな？」）はしていないという点である。

以上の結果から，本研究の成果を以下のように結論づけることができる。

〇各領域において「関数の考え」が顕著に表れてくる場の位置づけを明確化する。
〇a（表 2）の指導を重点化して位置づける。
- 関数関係が成立していることを前提とせず,２量の関係に児童自らが着目する教材化
- 一方的に解決に必要な数量を提示せず,児童自らがそれらを見出していくような教材化。

これらの手立てにより，児童自らが「関数」に着目して思考することのよさを実感し，それを活用して問題を解決する力が大きく育まれる。

Ⅵ. 今後の研究に向けて

本研究では一定の成果を得られたものの，対象は１学年のみである。また，過去の研究においても，ある特定の学年のみを対象にした「関数の考え」の研究が多くを占める。これは多くの公立小学校において，6 年間を通して同じ児童を対象に指導をしていくことの難しさが背景にある。

しかし，小学校段階においての「関数の考え」の確立と，中学校への接続を考えたとき，小学 6 年間における指導の体系化は急務だと言える。

今回の研究対象に含まなかった「関数の考え」c（表 2）の関数関係の表現。第 2,3 学年の a（表 2）の力をより高めていく指導，教材。中学校への接続を見通した高学年における「関数」の活用の系統的な位置づけ。これらの観点から，小学校 6 年間における「関数の考え」の指導の体系化を目的に，これからも研究を進めていきたい。また,今後はすでに本研究を提案している,北海道算数数学教育会小学校部会で,共同で研究を進めていきたいと考えている。

参考・引用文献

小学校学習指導要領解説　算数編

東京書籍　「平成 23 年度　新しい算数」内容解説資料

文部科学省　全国学力･学習状況調査（平成 19～22 年度）

文部省（1973）　関数の考えの指導　東京書籍

日本教材システム（2008）　小学校学習指導要領　新旧　比較対照表

片桐重男（2004）数学的な考え方とその指導　第 1 巻～4 巻　明治図書

杉山吉茂（2008）初等科数学科教育学序説　東洋館出版社

中島健三（1981）算数・数学教育と数学的な考え方　金子書房

橋本吉彦（2009）算数教育原論　東洋館出版社

菊池兵一（1976）新しい算数研究　1976 年 9 月号（No.66）　pp.2～17.

菊池兵一（1978）新しい算数研究　1978 年 11 月号（No.92）　pp.6～9.

黒澤俊二（2009）「関数の考え」を誘発する掲示物の条件と効果

越村尚貴（2008・2009）関数の考えを活かす指導Ⅰ・Ⅱ～系統的な関数の考えの指導を目指して～

竹本和哉（2009）数量関係領域における「関数の考え」における一考察